

En fait, elle dit qu'on ne peut pas considérer que la température de l'eau est constante pour ensuite calculer une variation de la température de l'eau. Elle trouve ~~cela~~ absurde. Elle va donc chercher un outil mathématique supplémentaire pour résoudre le problème. Le voici.

Elle considère  $f$  une fonction réelle à variable  $x$  réelle, et  $a$  et  $b$  deux nombres réels positifs. On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants* l'équation de la forme  $f' = a f + b$ . L'inconnue de cette équation est la fonction  $f$ . Cette équation différentielle admet une infinité de solutions, qui sont toutes de la forme  $f(x) = A e^{ax} - b/a$ . Dans ces solutions,  $A$  est un nombre quelconque.

Dans le cas qui va nous préoccuper ici, la fonction  $f$  sera la température  $T$  de l'eau de la piscine, supposée uniforme. La variable  $x$  sera en réalité le temps  $t$ . On écrira donc non  $f(x)$  mais  $T(t)$ , et non  $f'(x)$  mais  $\frac{dT}{dt}(t)$ . L'équation différentielle obtenue n'aura pas une infinité de solutions, mais la valeur de  $A$  sera déterminée à l'aide des conditions initiales sur  $T$ .

On suppose que l'air a une température constante  $T_{\text{nuit}} = 15^\circ\text{C}$ . On supposera négligeables les transferts thermiques par rayonnement et par convection. On appellera  $\Phi(t)$  le flux thermique instantané sortant de la piscine par la bâche et les parois et on supposera négligeables les autres flux thermiques sortant de la piscine.

k. Montrer que  $\frac{dU}{dt} = -\Phi$ , où  $U$  est l'énergie interne de l'eau de la piscine.

l. Montrer que la température de la piscine vérifie l'équation différentielle  $\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\tau}(T - T_{\text{nuit}})$ , où  $\tau$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $L, \ell, h, \rho, c$  et  $R_{\text{tot}}$ .

m. En considérant qu'à la date  $t = 0$  s (début de la nuit), la température de l'eau est  $T_1$ , exprimer  $T(t)$  au cours de la nuit.

n. Calculer la valeur de la température au bout de douze heures de nuit et la comparer à la valeur obtenue plus haut. Le modèle plus complet était-il nécessaire ? Expliquer pourquoi.